ETH Zürich
Chair of Software Engineering

Einführung in die Programmierung

Prof. Dr. Bertrand Meyer

Lektion 12: Rekursion

Sie erfahren Rekursion

```
class DOZENT feature
    fähig: BOOLEAN
        -- Ist dieser Dozent auf dem richtigen Niveau?

    besserer: like Current
        -- Ein Dozent, der besser erklären kann.

    erkläre_rekursion
        do
            erkläre_grundlegende_idee
            if fähig then
                erkläre_mehr
            else
                besserer.erkläre_rekursion
            end
        end
end
```

Der allgemeine Begriff der Rekursion

Eine Definition eines Konzepts ist rekursiv, falls sie selbst eine Instanz des Konzeptes beinhaltet.

- Eine Definition kann mehr als eine Instanz des Konzeptes beinhalten
- *Rekursion* ist der Gebrauch einer rekursiven Definition
- Rekursion kann *direkt* oder *indirekt* sein


8
PORTIONEN
La Vache qui rit®
Die Lachende Kuh®
CALCIUM
So zart, so gut!
Cremig!
8
PORTIONEN
bel

Die Geschichte des Universums*

*Édouard Lucas, Récréations mathématiques, Paris, 1883.

Dans le grand temple de Bénarès, sous le dôme qui marque le centre du monde, repose un socle de cuivre équipé de trois aiguilles verticales en diamant de 50 cm de haut.

A la création, Dieu enfila 64 plateaux en or pur sur une des aiguilles, le plus grand en bas et les autres de plus en plus petits. C'est la tour de Brahmâ.

Les moines doivent continûment déplacer les disques de manière que ceux-ci se retrouvent dans la même configuration sur une autre aiguille.

La règle de Brahmâ est simple: un seul disque à la fois et jamais un grand plateau sur un plus petit.

Arrivé à ce résultat, le monde tombera en poussière et disparaîtra.

Die Geschichte des Universums*

*Übersetzung des Texts auf der vorigen Seite.

Im Tempel von Bénarès, unterhalb des Doms, der das Zentrum der Welt kennzeichnet, stehen auf einer Kupferplatte drei diamantene Nadeln, 50 Zentimeter hoch.

Bei der Erschaffung hat Gott 64 Scheiben aus reinem Gold auf eine dieser Nadeln gesteckt, die grösste zuunterst, und darauf die restlichen, immer kleiner . Dies ist der Turm von Brahmâ.

Die Mönche müssen die Scheiben stets versetzen, bis diese in der gleichen Konfiguration auf einer anderen Nadel liegen.

Die Regel von Brahmâ ist einfach: Nur eine Scheibe pro Schritt, und niemals eine grössere Scheibe auf eine kleinere legen.

Sobald sie dieses Ziel erreichen, wird die Welt zu Staub zerfallen und für immer verschwinden.

Die Türme von Hanoi

Wieviele Schritte?

Annahme: n Scheiben ($n \geq 0$); 3 Nadeln *quelle*, *ziel*, *andere*

Die grösste Scheibe kann nur von *quelle* nach *ziel* bewegt werden, falls Letzteres leer ist; alle anderen Scheiben müssen auf *andere* liegen.

Also ergibt sich die minimale Anzahl Schritte zu:

$n-1$ von *quelle* nach *andere* bewegen

grösste von *quelle* nach *ziel* bewegen

$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1}$$

$$= 2 * H_{n-1} + 1$$

n-1 von *andere* nach *ziel* bewegen

Da $H_1 = 1$:

$$H_n = 2^n - 1$$

Diese Logik ergibt einen Algorithmus!

```
hanoi (n: INTEGER; quelle, ziel, andere: CHARACTER)
            -- Verschiebe n Scheiben von quelle nach ziel,
            -- mit andere als Zwischenspeicher.

    require
            nicht_negativ: n >= 0
            ungleich1: quelle /= ziel
            ungleich2: ziel /= andere
            ungleich3: quelle /= andere
    do
            if n > 0 then
                    hanoi (n – 1, quelle, andere, ziel)
                    umstelle (quelle, ziel)
                    hanoi (n – 1, andere, ziel, quelle)
            end
    end
```

Rekursive Aufrufe

Die Türme von Hanoi

Eine mögliche Implementation für *umstelle*

```
umstelle (quelle, ziel : CHARACTER)
        -- Verschieben von quelle nach ziel.
    require
        ungleich: quelle /= ziel
    do
        io.put_string (" Von ")
        io.put_character (quelle)
        io.put_string (" nach ")
        io.put_character (ziel)
        io.put_new_line
    end
```

Die Türme von Hanoi

Ein Beispiel

Ausführung des Aufrufs

hanoi (4, 'A', 'B', 'C')

wird eine Sequenz von 15 (2^4 -1) Instruktionen ausgeben:

Von *A* nach *C*	Von *A* nach *B*	Von *C* nach *B*
Von *A* nach *C*	Von *B* nach *A*	Von *B* nach *C*
Von *A* nach *C*	**Von *A* nach *B***	Von *C* nach *B*
Von *C* nach *A*	Von *B* nach *A*	Von *C* nach *B*
Von *A* nach *C*	Von *A* nach *B*	Von *C* nach *B*

Beispiele

- Rekursive Routine
- Rekursive Grammatik
- Rekursiv definiertes Programmierkonzept
- Rekursive Datenstrukturen
- Rekursiver Beweis

Rekursive Routine

Direkte Rekursion: Der Rumpf beinhaltet einen Aufruf der Routine selbst.

Beispiel: Die Routine *hanoi* der vorangegangenen Lösung des Problems der Türme von Hanoi

Rekursive Definition (aus der Generizität-Lektion)

Ein **Typ** ist:

- Entweder eine nicht-generische Klasse, z.B.
  STATION

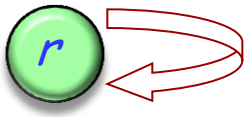
- Oder eine **generische Ableitung**, z.B. der Name einer Klasse, gefolgt von einer Liste von **Typen**, die tatsächlichen generischen Parameter, in Klammern, z.B.

  LIST [*STATION*]

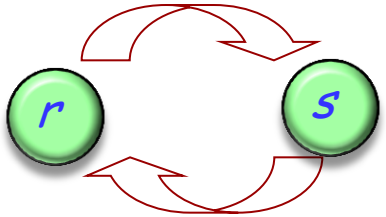
  LIST [*ARRAY* [*STATION*]]

Rekursion: direkt und indirekt

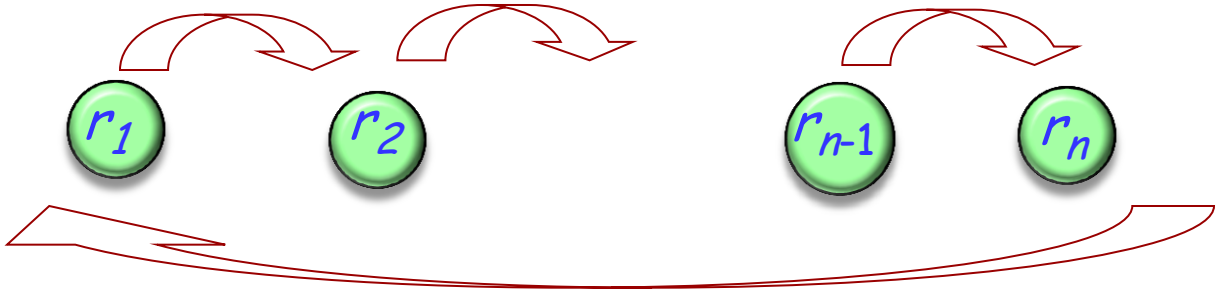
Routine *r* ruft sich selbst auf



r ruft *s* auf und *s* ruft *r* auf



r_1 ruft r_2 auf ... r_n ruft r_1 auf



Rekursive Grammatik

Instruktion ::= *Zuweisung* | *Konditional* | *Verbund* | ...

Konditional ::= **if** *Ausdruck* **then** *Instruktion*
else *Instruktion* **end**

Die lexikographische Ordnung definieren

Sie können diesen Begriff in der Praxis verwenden:

- *ABC* kommt vor *DEF*
- *AB* kommt vor *DEF*
- *A* kommt vor *AB*
- *A* kommt vor *ABC*
- Leeres Wort kommt vor *ABC*

Die Aufgabe ist, eine Definition vorzuschlagen. Wir verlangen nicht eine konstruktive Methode (ein Algorithmus), z.B.

„*Wir betrachten die ersten Buchstaben x1 und y1 von x und y; wenn x1 kleiner als y1 ist, dann kommt x vor y; sonst wenn x1 gleich y1 ist, dann…* (usw.)"

sondern eine echte Definition, in der folgende Form:

„Das Wort *x* kommt "**vor**" dem Wort *y* genau dann, wenn…"

Die Lexikographische Ordnung definieren

Problem: Definiere den Begriff, dass das Wort *w1* **vor** dem Wort *w2* kommt, nach alphabetischer Ordnung.

Konventionen:

- Ein **Wort** ist eine Sequenz von null oder mehr Buchstaben.
- Ein **Buchstabe** ist eines der folgenden Zeichen:

  A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
- Für alle Paare von Buchstaben ist bekannt, welcher "*kleiner*" als der andere ist. Die Ordnung ist jene der vorherigen Liste.

Die lexikographische Ordnung: Beispiele

ABC	kommt vor *DEF*
AB	kommt vor *DEF*
A	kommt vor *AB*
A	kommt vor *ABC*
Leeres Wort	kommt vor *ABC*

Eine rekursive Definition

Das Wort *x* kommt "**vor**" dem Wort *y* genau dann, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- *x* ist leer und *y* ist nicht leer
- Weder *x* noch *y* sind leer, und der erste Buchstabe von *x* ist *kleiner* als der erste Buchstabe von *y*
- Weder *x* noch *y* sind leer und (beide Bedingungen):
  - Ihre ersten Buchstaben sind die Gleichen
  - Das Wort, das man erhält, wenn man den ersten Buchstaben von *x* weglässt, kommt **vor** dem Wort, das man durch das Weglassen des ersten Buchstabens von *y* erhält

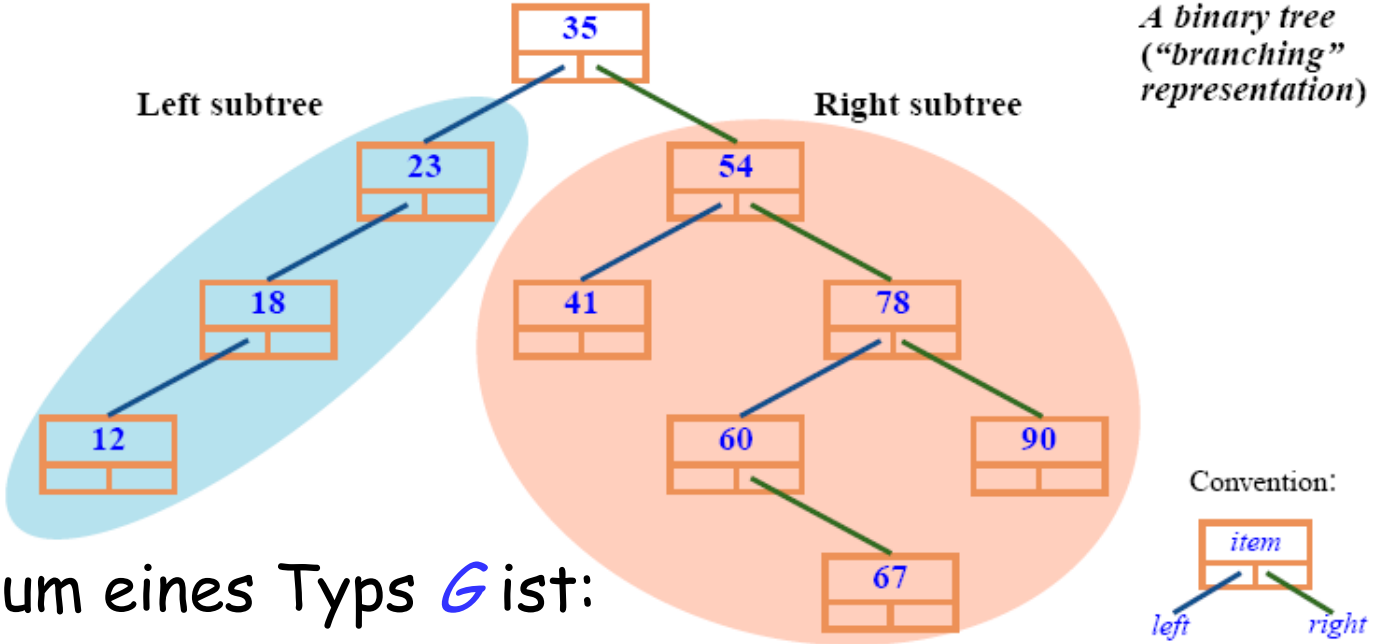
Als eine rekursive Funktion ausgedrückt

```
vor alias "<" (y: STRING) : BOOLEAN
   -- Kommt diese Kette vor y in lexikographischer Ordnung?
 do
  Result :=
     ((is_empty and not y.is_empty)     or
          ((not is_empty and not y.is_empty) and then
               ((first < y.first) or
               ((first = y.first) and (rest .vor (y.rest))
          )
     )
 )
end
```

Erstes Zeichen (vom Typ *CHARACTER*)

Der Rest des Wortes (vom Typ *STRING*)

Eine rekursive Datenstruktur



Ein binärer Baum eines Typs *G* ist:

- Entweder leer
- Oder ein *Knoten*, bestehend aus drei disjunkten Teilen:
  - Ein Wert des Typs *G*: Die Wurzel
  - Ein binärer Baum des Typs *G*, der **linke** Teilbaum*
  - Ein binärer Baum des Typs *G*, der **rechte** Teilbaum

*Engl.: *Subtree*

Knoten und Bäume: Ein rekursiver Beweis

Theorem: Mit jedem Knoten jedes binären Baumes können wir einen binären Baum assoziieren, sodass sie eins zu eins übereinstimmen.

Beweis:

- Falls der Baum leer ist: trivial
- Andernfalls:
  - Assoziiere die Wurzel mit dem gesamten Baum.
  - Jeder andere Knoten *n* ist entweder im linken oder im rechten Teilbaum; assoziiere *n* mit dem in diesem Teilbaum assoziierten Baum.

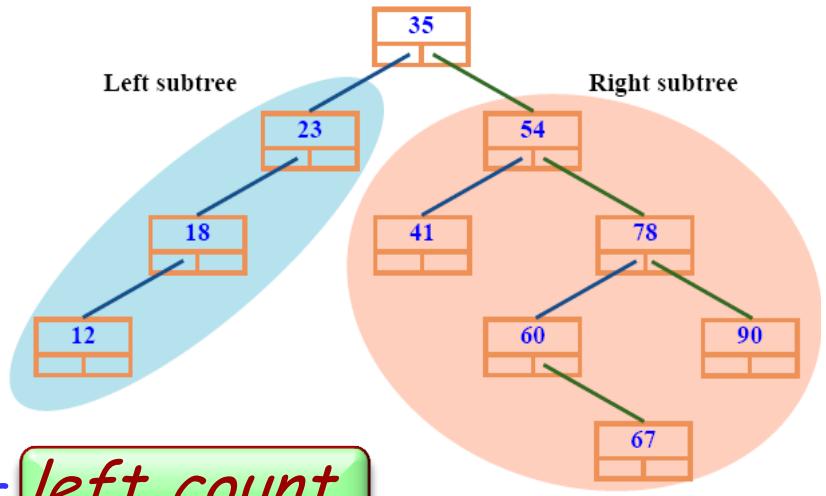
Konsequenz: Wir können über linke und rechte Teilbäume eines Knoten reden.

Skelett einer Klasse eines Binärbaums

```
class BINARY_TREE[G]
feature

        item: G

        left:  BINARY_TREE [G]
        right: BINARY_TREE [G]

        ... Andere Anfrage, Einfüge- und Löschbefehle ...

end
```

Rekursive Routine auf einer rekursiven Datenstruktur

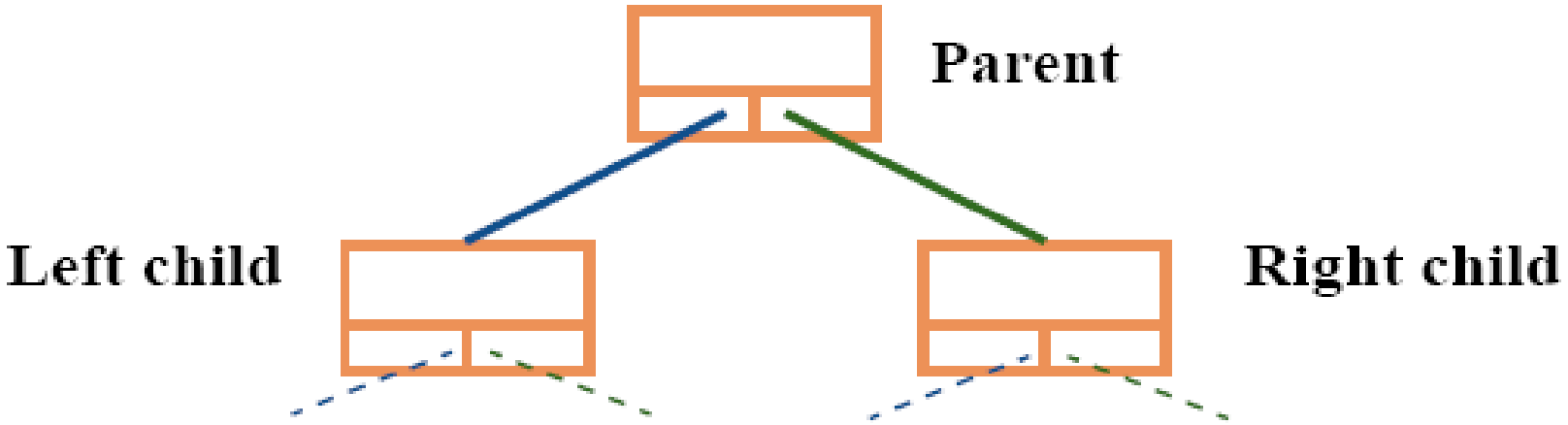
```
count: INTEGER
        -- Anzahl Knoten.
    do
        Result := 1
        if left /= Void then
            Result := Result + left.count
        end
        if right /= Void then
            Result := Result + right.count
        end
    end
```



Traversieren eines Binärbaums

```
print_all
        -- Alle Knotenwerte ausgeben.
    do
        if left /= Void  then left.print_all end
        print (item)
        if right /= Void then right.print_all end
    end
```

Kinder und deren Väter



Theorem: nur ein Vater(-knoten) (parent)

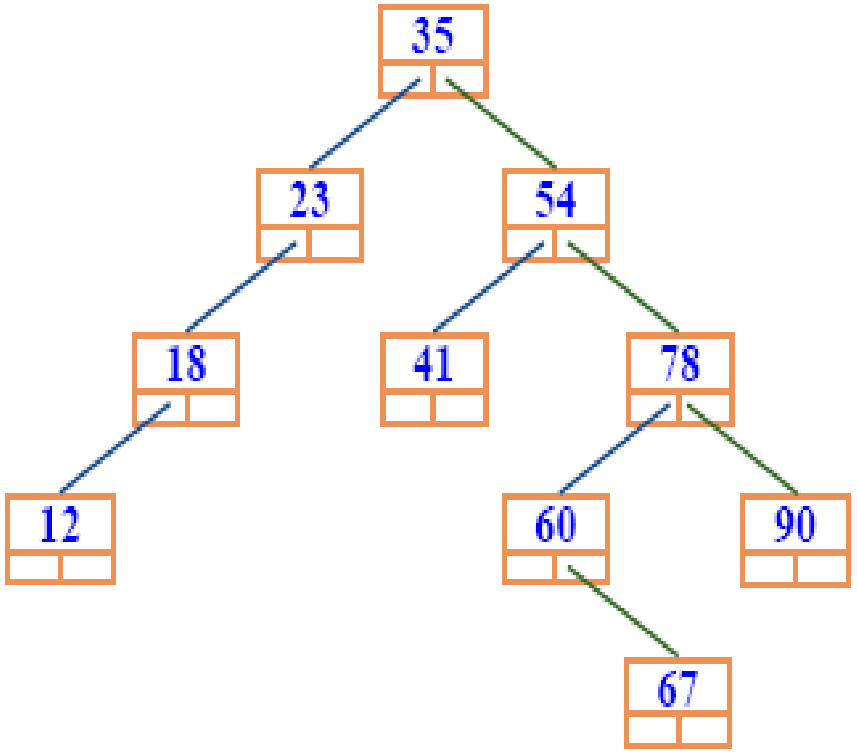
Jeder Knoten in einem binären Baum hat genau einen Vater, ausser die Wurzel, die hat keinen.

Mehr Eigenschaften und Terminologie

Ein Knoten eines Binärbaumes kann …

- Ein linkes und ein rechtes Kind
- Nur ein linkes Kind
- Nur ein rechtes Kind
- Kein Kind

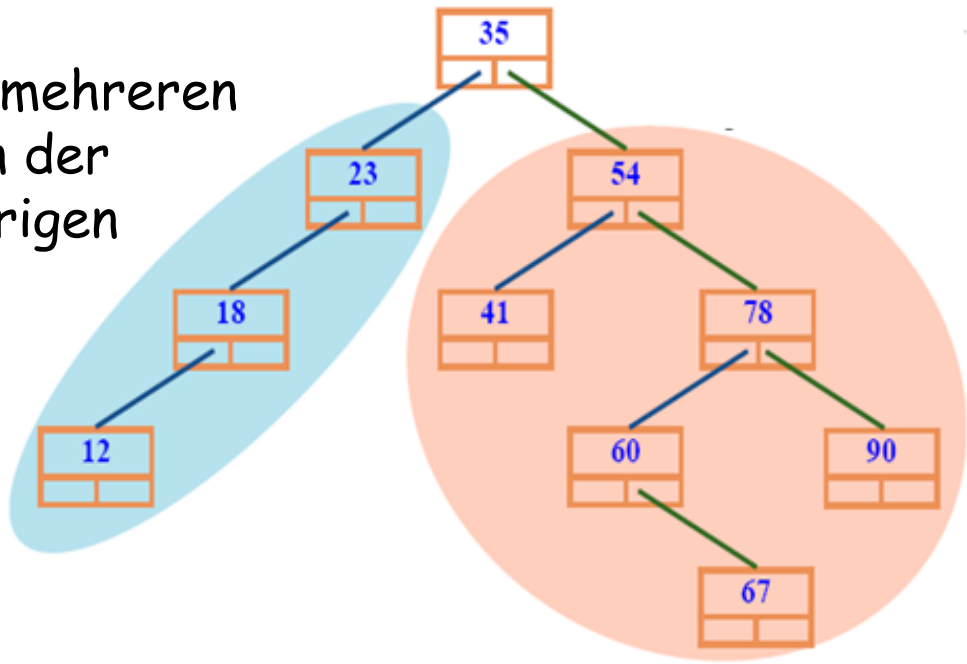
… haben



Mehr Eigenschaften und Terminologie

Aufwärtspfad (*upward path*):

- Eine Sequenz von einem oder mehreren Knoten, wobei jeder Knoten in der Sequenz der Vater des vorherigen ist (falls vorhanden)
- Analog: Abwärtspfad (*downward path*)



Theorem: Wurzelpfad

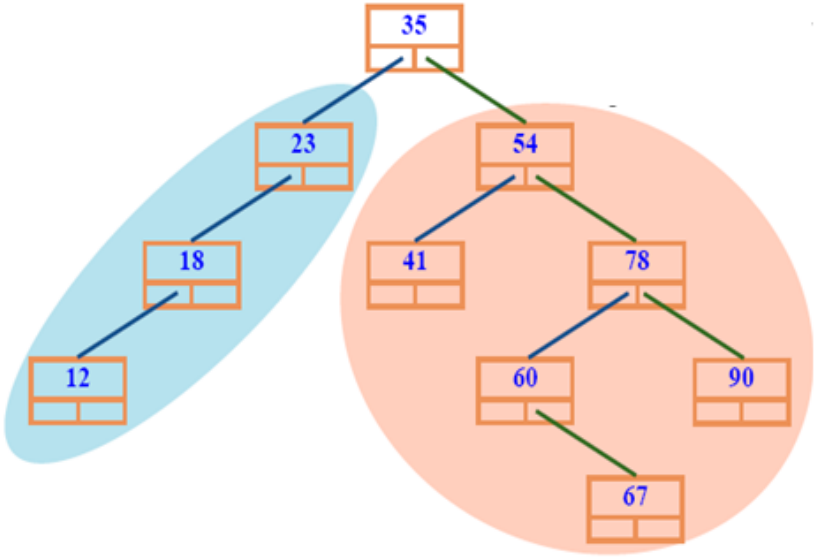
- Von jedem Knoten in einem Binärbaum gibt es einen einzigen Aufwärtspfad zu der Wurzel

Theorem: Abwärtspfad

- Für jeden Knoten in einem Binärbaum gibt es einen einzigen Abwärtspfad, der die Wurzel mit dem Knoten durch aufeinanderfolgende Anwendungen von *left* und *right* verbindet

Die Höhe eines Binärbaums

Die maximale Anzahl Knoten auf einem Abwärtspfad von der Wurzel zu einem Blatt




```
height: INTEGER
        -- Maximale Anzahl Knoten
        -- auf einem Abwärtspfad.
    local
        lh, rh : INTEGER
    do
        if left /= Void  then lh := left.height  end
        if right /= Void then rh := right.height end
        Result := 1 + lh.max (rh)
    end
```

Operationen auf binären Bäumen

```
add_left (x: G)
                -- Erzeuge linkes Kind mit Wert x.
        require
                no_left_child_behind: left = Void
        do
                create left.make (x)
        end

add_right (x: G) ...gleiches Muster...

make (x : G)
                -- Initialisiere mit Wert x.
        do
                item := x
        ensure
                set: item = x
        end
```

Traversieren eines Binärbaums

Symmetrische Reihenfolge (inorder):

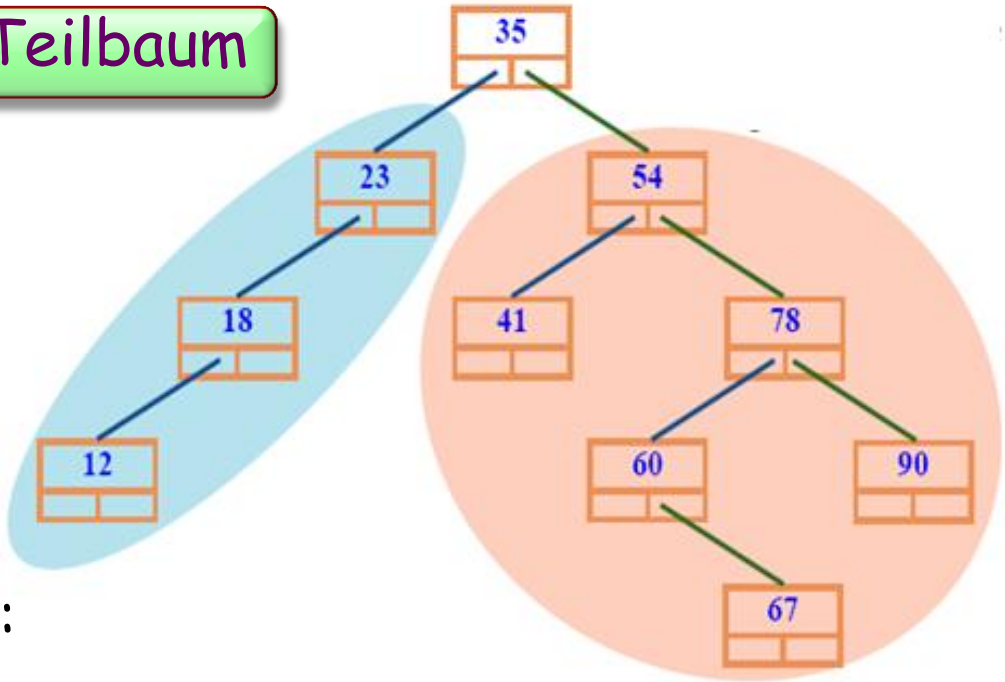
- traversiere linken Teilbaum
- besuche die Wurzel
- traversiere rechten Teilbaum

Hauptreihenfolge (preorder):

- besuche die Wurzel
- traversiere links
- traversiere rechts

Nebenreihenfolge (postorder):

- traversiere links
- traversiere rechts
- besuche die Wurzel



Binärer Suchbaum

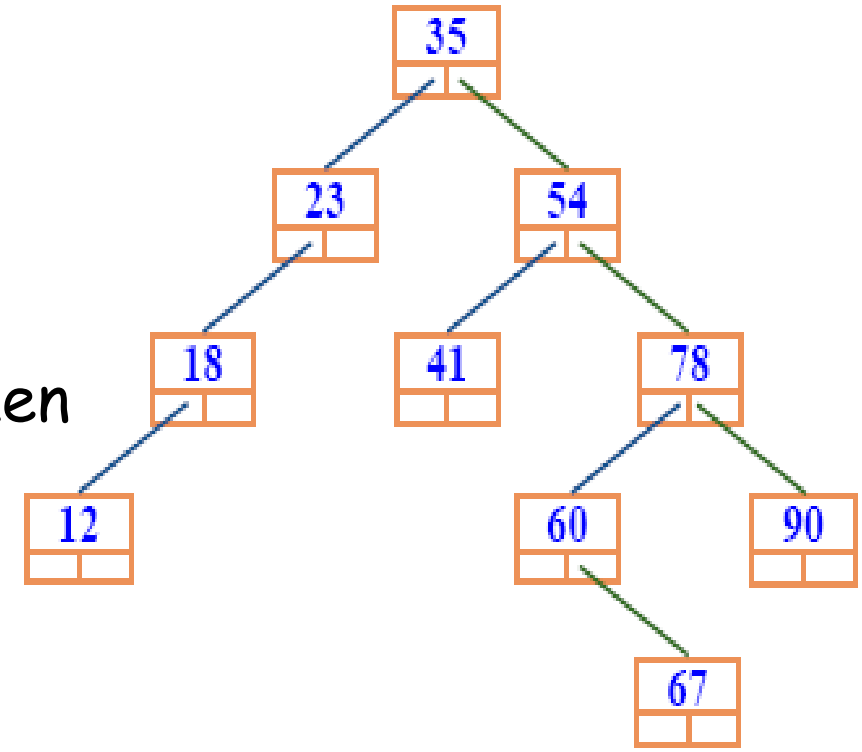
Ein Binärbaum über eine geordnete Menge G ist ein binärer Suchbaum, falls für jeden Knoten n gilt:

- Für jeden Knoten x des linken Teilbaums von n:

  $x.item < n.item$

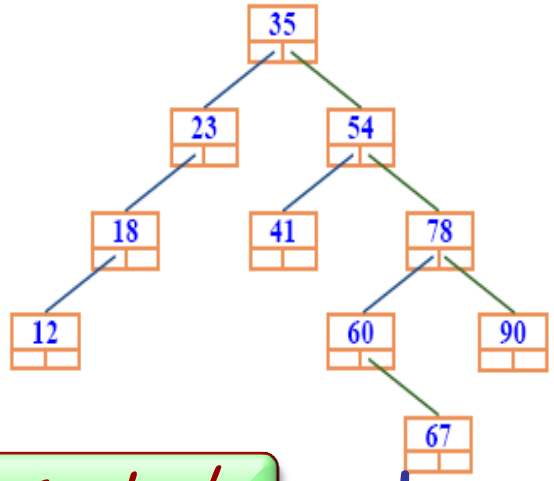
- Für jeden Knoten x des rechten Teilbaums von n:

  $x.item \geq n.item$



Elemente geordnet ausgeben

```
class BINARY_SEARCH_TREE [G ...] feature
        item: G
        left, right: BINARY_SEARCH_TREE[G]

         print_sorted
             -- Elemente geordnet ausgeben.
        do
             if left /= Void  then left.print_sorted end

             print (item)

             if right /= Void then right.print_sorted end
        end
end
```



Suchen in einem Binärbaum

```
class BINARY_SEARCH_TREE [G ...] feature
        item: G

        left, right: BINARY_SEARCH_TREE [G]

        has (x: G): BOOLEAN
                        -- Kommt x in einem Knoten vor?
                require
                        argument_exists: x /= Void
                do
                        if x = item then
                                Result := True
                        elseif x < item and left /= Void then
                                Result := left.has (x)
                        elseif x > item and right /= Void then
                                Result := right.has (x)
                        end
                end
end
```

Einfügen in einen Binärbaum

Versuchen Sie dies als Übung!

Wieso binäre Suchbäume?

Lineare Strukturen: Einfügen, Suchen und Löschen:

$O(n)$

Binärer Suchbaum: durchschnittlich für Einfügen, Suchen und Löschen: $O(\log(n))$

Aber: Worst case: $O(n)$! (Denkübung: Wann?)

- Verbesserungen: Rot-Schwarz-Bäume, AVL-Bäume

Messungen der Komplexität: best case, average case, worst case.

Wohlgeformte rekursive Definitionen

Eine nützliche rekursive Definition sollte folgendes sicherstellen:

- R1 Es gibt mindestens einen nicht-rekursiven Zweig
- R2 Jeder rekursive Zweig tritt in einem vom Originalkontext verschiedenen Kontext auf
- R3 Für jeden rekursiven Zweig gilt, dass der Kontextwechsel (R2) ihn näher zu einem nicht-rekursiven Zweig bringt (R1)

“Hanoi” ist wohlgeformt

```
hanoi (n: INTEGER; quelle, ziel, andere: CHARACTER)
            -- Verschiebe n Scheiben von quelle nach ziel,
            -- mit andere als Zwischenspeicher.

    require
            nicht_negativ: n >= 0
            ungleich1: quelle /= ziel
            ungleich2: ziel /= andere
            ungleich3: quelle /= andere
    do
            if n > 0 then
                    hanoi (n – 1, quelle, andere, ziel)
                    umstelle (quelle, ziel)
                    hanoi (n – 1, andere, ziel, quelle)
            end
    end
```

Was wir bisher gesehen haben:

Eine Definition ist rekursiv, falls sie den eigenen Begriff auf ein kleineres Ziel anwendet.

Was alles rekursiv sein kann: Eine Routine, die Definition eines Konzeptes…

Immer noch einiges unklar: Besteht nicht die Gefahr einer zyklischen Definition?

Rekursionsvariante

Eine rekursive Routine sollte eine Rekursionsvariante benutzen, eine ganze Zahl, die mit jedem Aufruf verbunden wird, so dass:

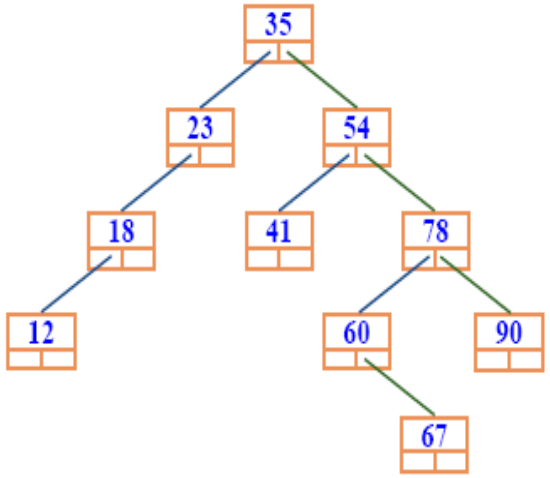
- Die Variante ist immer >= 0 (Aus der Vorbedingung)
- Falls die Variante zu Beginn einer Routinenausführung den Wert v hat, gilt für den Wert v' für alle rekursiven Aufrufe

$$0 \leq v' < v$$

Hanoi: Wie lautet die Variante?

```
hanoi (n : INTEGER; quelle, ziel, andere : CHARACTER)
            -- Verschiebe n Scheiben von quelle nach ziel,
            -- mit andere als Zwischenspeicher.

        require
                ...
        do
                if n > 0 then
                        hanoi (n – 1, quelle, andere, ziel)
                        umstelle (quelle, ziel)
                        hanoi (n – 1, andere, ziel, quelle)
                end
        end
```

Suchbäume ausgeben: Was ist die Variante?




```
class BINARY_SEARCH_TREE [G ...] feature
        item: G
        left, right: BINARY_SEARCH_TREE [G ]

         print_sorted
             -- Elemente geordnet ausgeben.
        do
             if  left /= Void  then  left.print_sorted  end

             print (item)

             if  right /= Void  then  right.print_sorted  end
        end
end
```

Verträge für rekursive Routinen

```
hanoi (n : INTEGER; quelle, ziel, andere : CHARACTER)
                -- Verschiebe n Scheiben von quelle nach ziel,
                -- mit andere als Zwischenspeicher.
                -- variant: n
                -- invariant: Die Scheiben auf jeder Nadel sind
                -- abnehmend in ihrer Grösse
        require
                ...
        do
                if n > 0 then
                        hanoi (n - 1, quelle, andere, ziel)
                        umstelle (quelle, ziel)
                        hanoi (n - 1, andere, ziel, quelle)
                end
        end
```

McCarthy's 91-Funktion

$M(n) =$

- $n - 10$ falls $n > 100$
- $M(M(n + 11))$ falls $n \leq 100$

Noch eine Funktion

bizarr (*n*) =

- 1 falls *n* = 1
- *bizarr* (*n* / 2) falls *n* gerade ist
- *bizarr* ((3 * *n* + 1) / 2) falls *n* > 1 und *n* ungerade ist

Fibonacci-Zahlen

$fib\,(1) = 0$

$fib\,(2) = 1$

$fib\,(n) = fib\,(n-2) + fib\,(n-1)$ for $n > 2$

Fakultät (*factorial*)

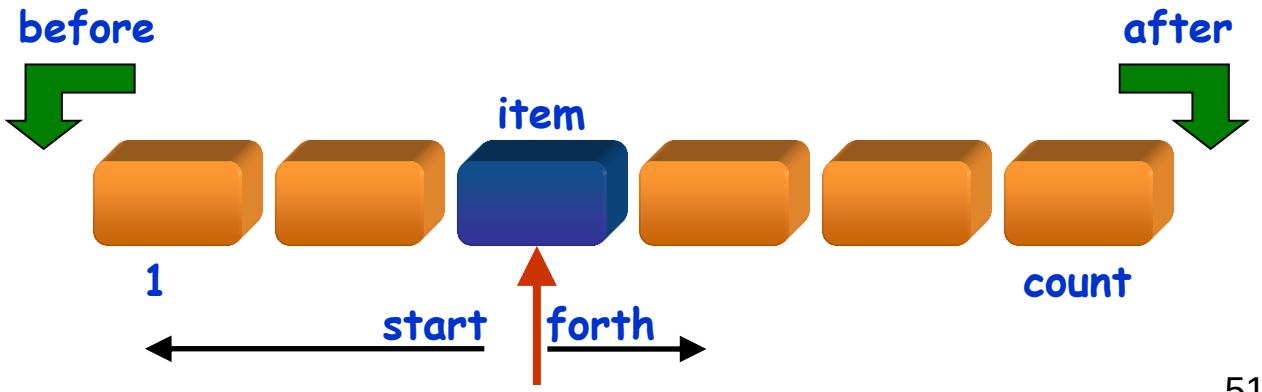
$0! = 1$

$n! = n * (n-1)!$ for $n > 0$

Die rekursive Definition ist nur für Demonstrationszwecke interessant; in der Praxis werden Schleifen (oder Tabellen) benutzt

Unser ursprüngliches Schleifenbeispiel

```
highest_name : STRING
            -- Alphabetisch grösster Stationsname von Line8.
        local
            c : ITERATION_CURSOR [STATION]
        do
            from
                c := Line8.new_cursor; Result := ""
            until
                c.after
            loop
                Result := greater (Result, c.item.name)
                c.forth
            end
        end
```

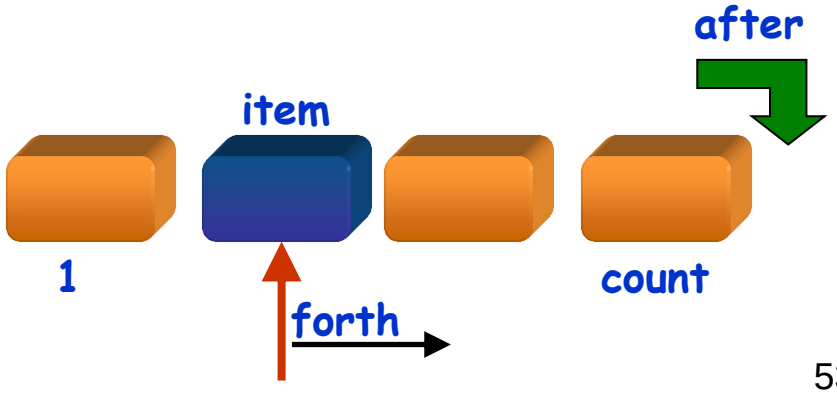


Eine rekursive Alternative

```
highest_name: STRING
        -- Alphabetisch grösster Stationsname von Line8.
    require
        not Line8.is_empty
    do
        Result := highest_from_cursor (Line8.new_cursor)
    end
```

Hilfsfunktion für Rekursion

```
highest_from_cursor (c: ITERATION_CURSOR [STATION]): STRING
        -- Alphabetisch grösster Stationsname der Linie
        -- von der Cursorposition c ausgehend.
    require
        c /= Void and not c.off
    do
        Result := c.item.name
        c.forth
        if not c.after then
            Result := greater (Result, highest_from_cursor (c) )
        end
    end
```



Eine Schleifenversion mit Argumenten

```
maximum (a: ARRAY [STRING]): STRING
            -- Alphabetisch grösstes Element in a.
        require
            a.count >= 1
        local
            i: INTEGER
        do
            from
                i := a.lower + 1; Result := a.item (a.lower)
            invariant
                i > a.lower; i <= a.upper + 1
                -- Result ist das Maximum der Elemente von a [a.lower .. i – 1]
            until
                i > a.upper
            loop
                if a.item (i) > Result then Result := a.item (i) end
                i := i + 1
            end
        end
```

Rekursive Version

```
maxrec (a : ARRAY [STRING]): STRING
                -- Alphabetisch grösstes Element in a.
        require
                a.count >= 1
        do
                Result := max_from (a, a.lower)
        end

max_from (a: ARRAY [STRING]; i: INTEGER): STRING
                -- Alphabetisch grösstes Element in a, von Index i ausgehend.
        require
                i >= a.lower; i <= a.upper
        do
                Result := a.item (i)
                if i < a.upper then
                        Result := greater (Result, max_from (a, i + 1))
                end
        end
```

Jim Horning (details in *Touch of Class*)

In the summer of 1961 I attended a lecture in Los Angeles by a little-known Danish computer scientist. His name was Peter Naur and his topic was the new language Algol 60. In the question period, the man next to me stood up. "It seems to me that there is an error in one of your slides."

Peter was puzzled, "No, I don't think so. Which slide?"

"The one that shows a routine calling itself. That's impossible to implement."

Peter was even more puzzled: "But we have implemented the whole language, and run all the examples through our compiler."

The man sat down, still muttering to himself, "Impossible! Impossible!". I suspect that much of the audience agreed with him.

At the time it was fairly common practice to allocate statically the memory for a routine's code, its local variables and its return address. The call stack had been independently invented at least twice in Europe, under different names, but was still not widely understood in America.

Rekursionseliminierung

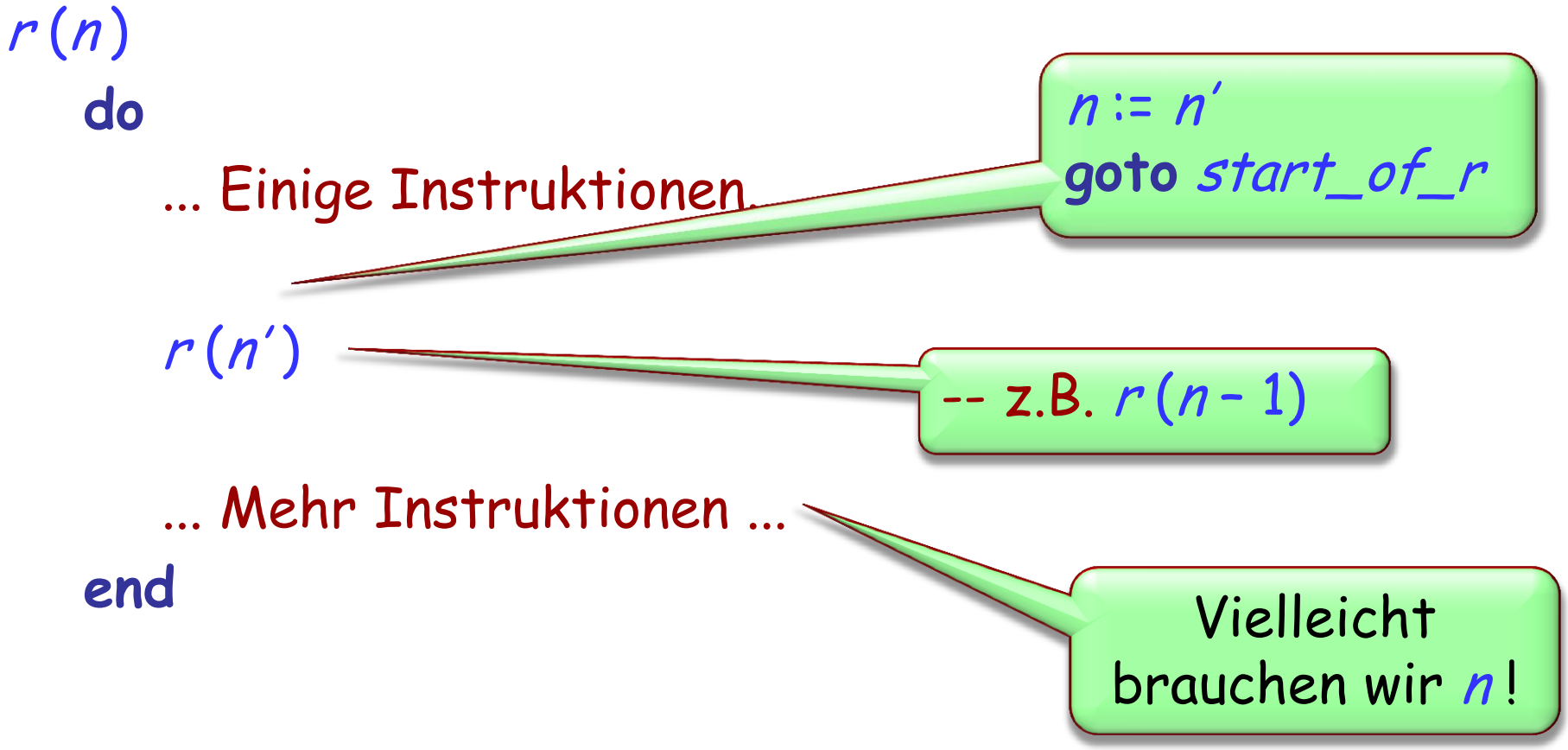
Rekursive Aufrufe bringen (in einer Standardimplementation ohne Optimierungen) zur Laufzeit eine Performanceeinbusse mit sich: Der Stack der konservierten Werte muss aufrecht erhalten werden.

Verschiedene Optimierungen sind möglich.

Manchmal kann ein rekursives Schema durch eine Schleife ersetzt werden. Dies nennt man Rekursionseliminierung.

"Endrecursion" (Die letzte Instruktion einer Routine ist ein rekursiver Aufruf) kann meistens eliminiert werden.

Rekursionseliminierung



Nach einem Aufruf müssen die vorherigen Werte der Argumente und andere Kontextinformationen wiederhergestellt werden.

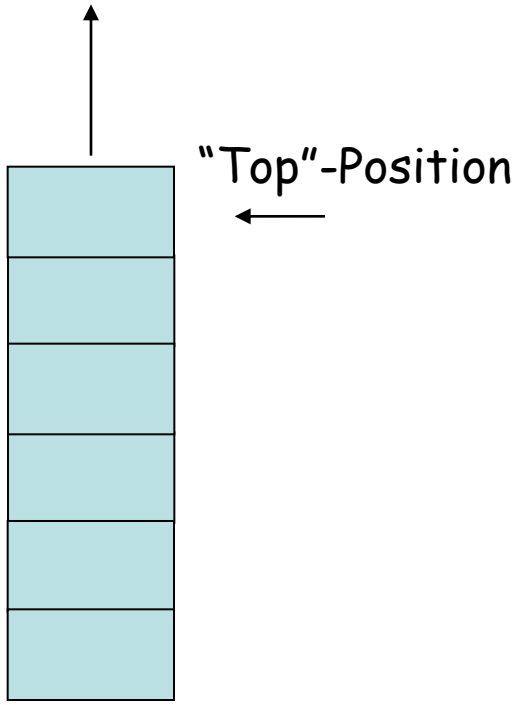
Einen Stack benutzen

Abfragen:

- Ist der Stack leer? *is_empty*
- Oberstes Element (falls vorhanden): *item*

Befehle:

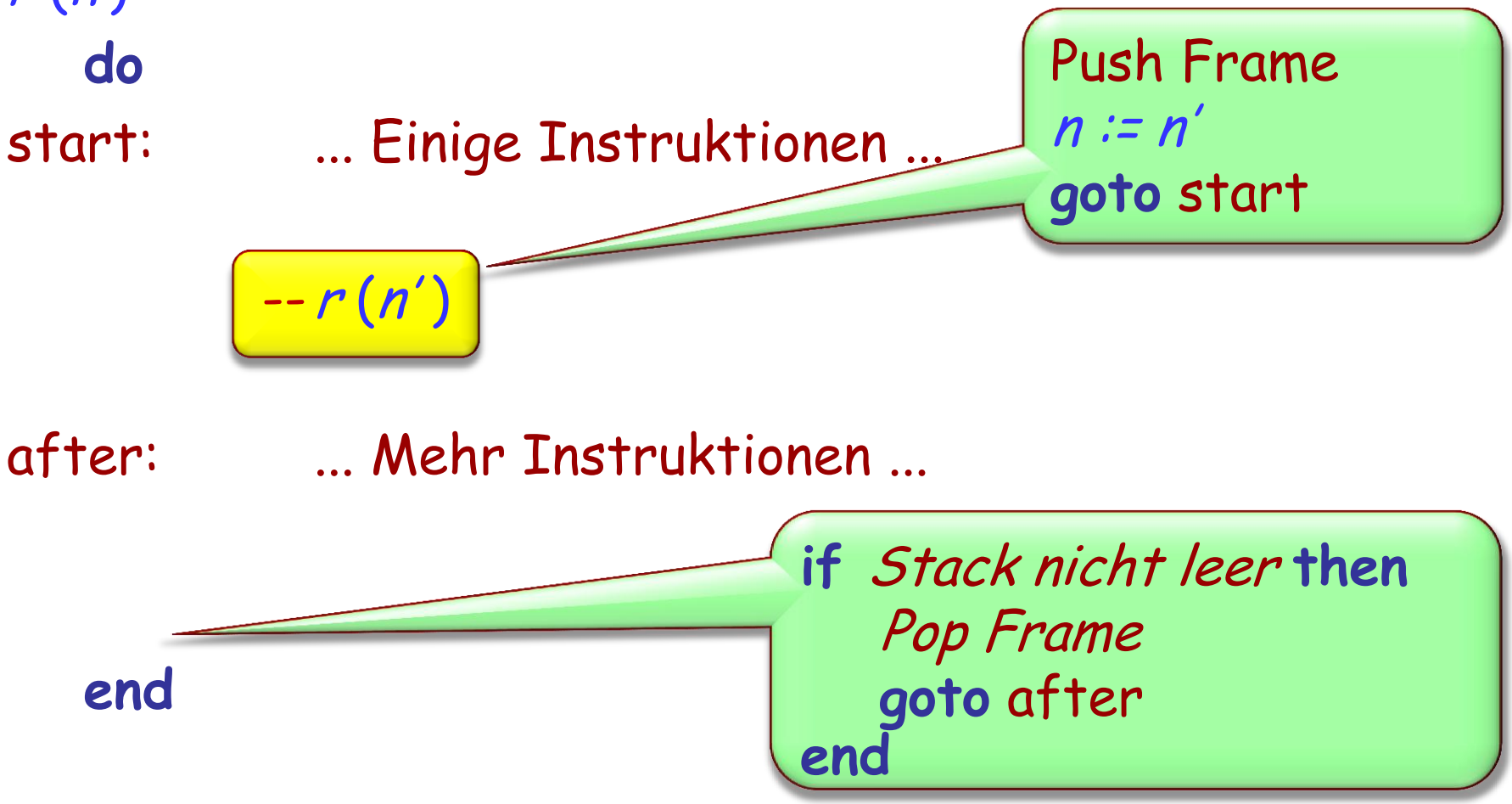
- Ein Element zuoberst einfügen: *put*
- Oberstes Element entfernen (falls vorhanden): *remove*



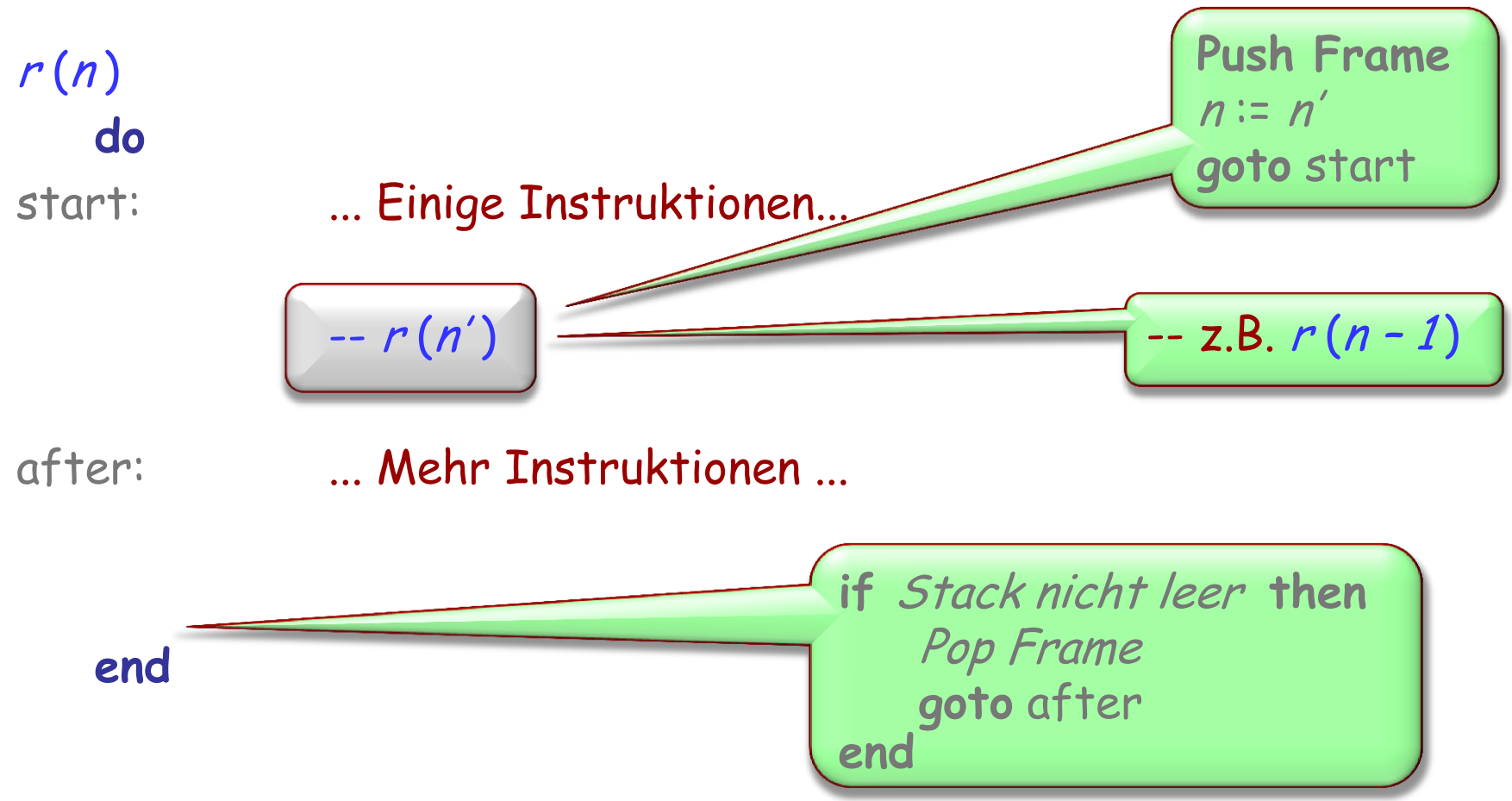
Vor einem Aufruf: Ein Frame wird auf den Stack "gepusht". Es beinhaltet die Werte von lokalen Variablen, Argumenten und Rückgabeinformationen.

Nach einem Aufruf: Das Frame wird vom Stack abgerufen und die Werte wiederhergestellt.

Rekursionseliminierung



Die Stack-Nutzung minimieren



Man muss simple Transformationen nicht auf dem Stack speichern oder von dort abrufen. Z.B. $n := n - 1$, und umgekehrt $n := n + 1$

Rekursion als Problemlösungstechnik

Anwendbar, falls Sie eine Lösung eines Problems aus Lösungen für kleinere Teilprobleme zusammensetzen können.

Was wir in dieser Vorlesung gesehen haben

- Definition des Begriffs der Rekursion
- Viele rekursive Routinen
- Rekursive Datenstrukturen
- Rekursive Beweise
- Die Anatomie eines rekursiven Algorithmus: Die Türme von Hanoi
- Was eine rekursive Definition „wohlgeformt" macht
- Binärbäume
- Binäre Suchbäume
- Anwendungen von Rekursion
- Grundlagen von Rekursionsimplementierung